A4 組報告

張承恕、梁仁謙、孫可杰、張祐銘，何隆貴

October 4, 2021

摘要

在進行量子位元的操控之前，必須先知道量子位元及波導管的基本特性，像是共振頻率與耦合強度，才有辦法進一步控制量子位元。我們會在第一節中，先了解平面波導管與約瑟芬接面的基本性質，再進一步學習常見的兩種量子位元：SQUID 與 Transmon，同時學習如何用品質因子來描述波導管與量子位元的好壞。最後研究當量子位元與波導管有著強烈耦合時的 Avoid crossing 現象。在第二節中，我們會介紹我們使用的儀器以及實驗過程，並在第三節中分析我們得到的結果，同時討論實驗中出現的磁滯現象與疑似 two-photon absorption 的現象。最後，我們會在第四節中，將我們這次實驗的結果做個總結。

1 簡介

1.1 平面波導管

儲存於平面波導管 (coplanar waveguide, CPW) 的光子可以跟超導量子位元 (superconducting qubit) 進行很好的耦合，因而被廣泛地運用在量子光學的實驗中。此外，較不容易出現寄生電容與寄生電感，以及能避開基板的限制，利用線路控制阻抗也是 CPWs 的特色。CPWs 大致上是一個三層的結構，最上面是利用微影技術畫出的線路，包含兩片接地的金屬與一條中心線 (center conductor)，中間是氧化層，最下面則是高電阻率、無摻雜的的矽基板。同時，利用微影技術可以畫出電容與其他微波元件，或是 qubits 進行耦合，而不同形狀的電容也會影響共振腔與其他元件間的偶和強度。

CPWs 的共振頻率可以表示成：

$$f_0 = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_{\text{eff}}}}\frac{1}{2l}, \tag{1.1}$$

其中 l 是中心線的長度，$\frac{c}{\sqrt{\varepsilon_{\text{eff}}}} = v_p$ 是微波的相速度 (phase velocity)，而 ε_{eff} 則是波導的等效相對電容率 (effective permittivity)，這個量會與基板與氧化層的相對電容率 ε_1、ε_2 有關。相速度還可以表示成：

$$v_p = \frac{1}{\sqrt{C_l L_l}}, \tag{1.2}$$

而 C_l、L_l 分別是 CPWs 單位長度的電容與電感，主要與線路的幾何形狀有關。同時，CPWs 的特性阻抗 (characteristic impedance) $Z_0 = \sqrt{\frac{L_l}{C_l}}$，因此可以由設計線路的形狀來改變其阻抗，進行阻抗匹配。

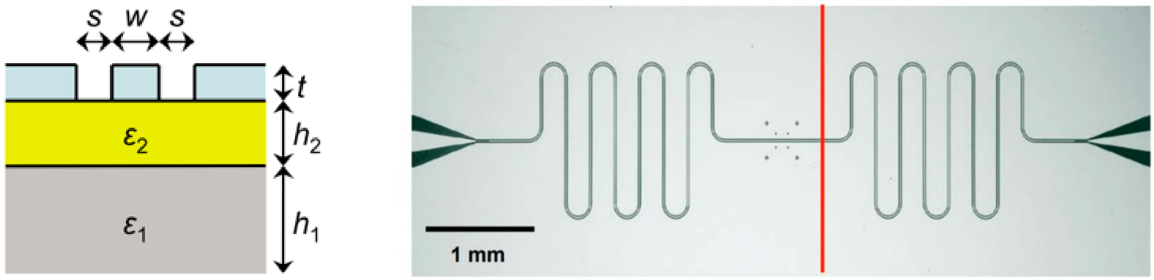

圖 1.1: 左圖為平面波導管縱剖面示意圖，灰色的是無摻雜的矽基板，中間黃綠色的是氧化層，其中 ε_1、ε_2 分別是矽基板與氧化層的相對電容率。最上方淺藍色的是由鋁畫出的線路，一般而言，左右兩塊會接地，而中間則是 quasi-TEM mode 的中心線。圖片來自 [1]。右圖則是平面波導管的俯視圖，深色的部分是不導電的氧化層，淺色的部分則是以微影技術畫上的鋁，也就是左圖藍色的部分，中間的方格則是嵌在波導管中的量子位元。

1.2 約瑟芬接面

當我們設置好共振腔後，最重要的就是要有量子位元，目前實驗上有許多方式可以實現量子位元，我們這次的實驗採用約瑟芬接面 (Josephson junction, JJ) 與一個電容板並聯，以形成一個非簡諧振盪的量子位元。

Josephson junction 是由兩個超導材料中間夾一層絕緣材料，通常超導材料選用鋁。由 BCS 理論可知在超導臨界溫度以下，由於電子和聲子之間的交互作用，導致兩個電子之間有足以抵抗庫倫作用力的吸引力，並且形成 Cooper pairs，兩塊超導體之間則會因 Cooper pairs 的穿隧效應而形成通路。

由於其超導態，我們可以假設兩塊超導體 Cooper pairs 的波函數為 $\Psi_i = \sqrt{n_k}e^{i\theta_k}$，$k = 1, 2$，同時兩個波函數互相正交，其中 n_k 為兩塊超導體的電荷密度。假設兩塊 JJs 之間的電位差為 $V(t)$，則兩塊 JJs 之間 Cooper pairs 的能量差為 $2eV$(因為一對有兩個電子)，設 1 號超導的電子對能量為 eV，2 號超導的電子對能量為-eV。此時，此系統為 two-level system，其 Hamiltonian：

$$\hat{H} = \begin{bmatrix} \langle\Psi_1|\hat{H}|\Psi_1\rangle & \langle\Psi_1|\hat{H}|\Psi_2\rangle \\ \langle\Psi_2|\hat{H}|\Psi_1\rangle & \langle\Psi_2|\hat{H}|\Psi_2\rangle \end{bmatrix} \tag{1.3}$$

因為 $\langle\Psi_1|\hat{H}|\Psi_1\rangle$、$\langle\Psi_2|\hat{H}|\Psi_2\rangle$ 分別代表 Ψ_1、Ψ_2 的能量，故：

$$\begin{cases} \langle\Psi_1|\hat{H}|\Psi_1\rangle = eV \\ \langle\Psi_2|\hat{H}|\Psi_2\rangle = -eV \end{cases} \tag{1.4}$$

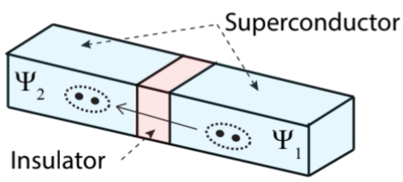

圖 1.2: 約瑟芬接面示意圖。圖中兩個淺藍色長方體為超導體，一般以鋁製成，而中間的淡紅色長方體則是絕緣層，通常用氧化鋁製成，厚度約為 1nm。圖片來自 [2]。

並假設 $\langle\Psi_1|\,\hat{H}\,|\Psi_2\rangle = \langle\Psi_2|\,\hat{H}\,|\Psi_1\rangle^* = K \in \mathbb{R}$，則根據 Schrödinger equation 可得：

$$\begin{bmatrix} eV & K \\ K & -eV \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{n_1}e^{i\theta_1} \\ \sqrt{n_2}e^{i\theta_2} \end{bmatrix} = i\hbar\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \sqrt{n_1}e^{i\theta_1} \\ \sqrt{n_2}e^{i\theta_2} \end{bmatrix} \tag{1.5}$$

我們可以解出：

$$\begin{cases} \dot{n}_1 = \dot{n}_2 = \frac{2K\sqrt{n_1 n_2}}{\hbar}\sin\varphi \\ \dot{\theta}_1 = \frac{1}{\hbar}\left(eV - K\sqrt{\frac{n_2}{n_1}}\right)\cos\varphi \\ \dot{\theta}_2 = \frac{1}{\hbar}\left(eV - K\sqrt{\frac{n_1}{n_2}}\right)\cos\varphi \end{cases} \tag{1.6}$$

其中 $\varphi = \theta_1 - \theta_2$ 是 Josephson phase。又因為 $I \propto \dot{n}$，我們將上式改寫成：

$$\begin{cases} I = I_0 \sin\varphi \\ \frac{\partial\varphi}{\partial t} = \frac{2eV}{\hbar} \end{cases} \tag{1.7}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} I = I_0 \sin\varphi \\ V = \frac{\Phi_0}{2\pi}\frac{\partial\varphi}{\partial t} \end{cases} \tag{1.8}$$

這個結果就是約瑟芬方程式 (Josephson equation)，其中 I_0 是臨界電流，通過接面的電流超過這個值就會破壞接面的超導態，而 $\Phi_0 = \frac{2\pi\hbar}{2e}$ 是磁通量量子 (flux quantum)。
我們再進一步觀察約瑟芬方程式：

$$V = \frac{\Phi_0}{2\pi}\frac{\partial\varphi}{\partial t} \tag{1.9}$$

$$= \frac{\Phi_0}{2\pi}\frac{1}{I_0\cos\varphi}\frac{\partial I}{\partial t} \tag{1.10}$$

$$= \frac{L_0}{\cos\varphi}\frac{\partial I}{\partial t} \tag{1.11}$$

可以發現 JJ 是一個隨相位變化的電感，其電感值 $L = \frac{L_0}{\cos\varphi}$，這邊 $L_0 = \frac{\Phi_0}{2\pi I_0}$ 則是電流為 0 時 JJ 的電感。
最後我們計算一下 JJ 中儲存的能量：

$$\begin{aligned} U &= \int_{t_1}^{t_2} IV \\ &= \int_{t_1}^{t_2} I_c \sin(\varphi)\frac{\Phi_0}{2\pi}\frac{\partial\varphi}{\partial t}dt \\ &= I_c\frac{\Phi_0}{2\pi}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\sin(\varphi)d\varphi \\ &= E_J(\cos\varphi_1 - \cos\varphi_2) \end{aligned} \tag{1.12}$$

其中 $E_J = \frac{I_c\Phi_0}{2\pi}$ 被稱為約瑟芬能量 (Josephson energy)，這裡可以發現 JJs 儲存的能量只跟相位變化有關，如果將 $\varphi = 0$ 時的能量定成位能 0 點，我們可以將約瑟芬接面的位能定成：

$$U(\varphi) = E_J(1 - \cos\varphi) \tag{1.13}$$

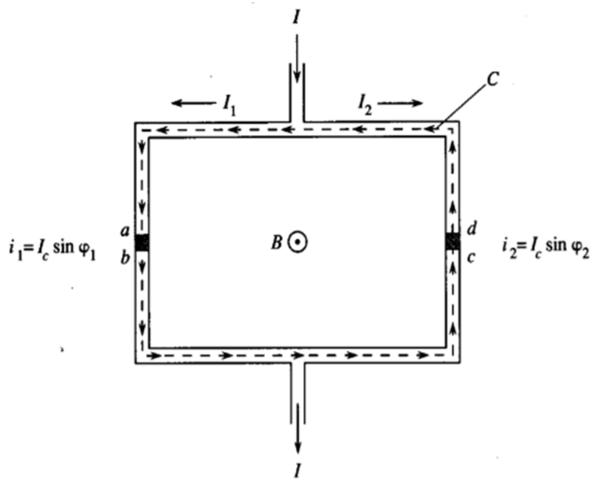

圖 1.3: SQUID 與外加磁場。兩個黑色的小長方形帶表兩個約瑟芬接面，並以 a, b, c, d 標出接面兩端的位置方便分析，C 代表對 SQUID 的線路進行環積分的路徑。

1.3 量子超導干涉效應

接下來探討兩個相同的 JJs 在有外加磁場下的量子超導干涉效應 (Superconducting Quantum Interference Device, DC SQUID)，假設兩個相同的 JJs 中間有一個螺線管，其造成的外加磁場為 B，且磁通量為 Φ_{ext}，但磁場覆蓋的範圍不包含線路的部分，由電荷守恆可知 $I = I_1 + I_2$，因此：

$$I = I_0 \sin\varphi_1 + I_0\varphi_2 \tag{1.14}$$

$$= 2I_0 \cos\left(\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}\right) \sin\left(\frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\right) \tag{1.15}$$

其中 φ_1, φ_2 是沒有外加磁場時，兩個約瑟芬接面的 Josephson phase 。對波函數來說，相位差 2π 的整數倍仍會展現出同樣物理現象，因此：

$$(\theta_b - \theta_a) + (\theta_c - \theta_b) + (\theta_d - \theta_c) + (\theta_a - \theta_d) = 2n\pi \tag{1.16}$$

其中 $\theta_{\mathrm{i}}, \mathrm{i} = a, b, c, d$ 代表 i 點上波函數的相位。
古典上，一個帶有動量 $\vec{p}$ 及電量的電子，在磁場中的 Hamiltonian 可以表示成：

$$H = \frac{1}{2m}|\vec{p} - e\vec{A}|^2 \tag{1.17}$$

其中，$\vec{A}$ 是磁位能 (vector potential) 。而在量子力學中，我們需要將 $\vec{p}$ 換成算符 $\hat{p} = -i\hbar\nabla$，並將 Hamiltonian 改寫成：

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}\left(-i\nabla - e\vec{A}\right)^2 \tag{1.18}$$

為了方便解薛丁格方程式，我們令波函數 $\Psi = e^{ig}\Psi'$，其中：

$$g = \frac{e}{\hbar}\int_O^r \vec{A}(\vec{r}')d\vec{r}' \tag{1.19}$$

由此可以解出：

$$-\frac{\hbar}{2m}\nabla^2\Psi' = i\hbar\frac{\partial\Psi'}{\partial t} \tag{1.20}$$

我們可以發現 Ψ' 不會受到磁場影響，也就是磁場只會讓波函數產生相位變化，因此，我們可以把 (1.16) 式的相位變化詳細寫下來：

$$(\theta_b-\theta_a)+(\theta_c-\theta_b)+(\theta_d-\theta_c)+(\theta_a-\theta_d)=2n\pi \tag{1.21}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow&\left(\varphi_1-\frac{e}{\hbar}\int_a^b\vec{A}\cdot d\vec{l}\right)+\left(-\frac{e}{\hbar}\int_b^c\vec{A}\cdot d\vec{l}\right)\\ &+\left(-\varphi_2-\frac{e}{\hbar}\int_c^d\vec{A}\cdot d\vec{l}\right)+\left(-\frac{e}{\hbar}\int_d^a\vec{A}\cdot d\vec{l}\right)=2n\pi\end{aligned} \tag{1.22}$$

$$\Rightarrow\varphi_1-\varphi_2=2n\pi+\frac{e}{\hbar}\oint_C\vec{A}\cdot d\vec{l} \tag{1.23}$$

其中 C 指對線路做環積分，這邊可以利用旋度定理化簡積分：

$$\begin{aligned}\oint_C\vec{A}\cdot d\vec{l}&=\iint\limits_{C^\circ}\nabla\times\vec{A}\cdot d\vec{a}\\ &=\iint\limits_{C^\circ}\vec{B}\cdot d\vec{a}\\ &=\Phi_{ext}\end{aligned} \tag{1.24}$$

這裡的 C° 是指對線路 C 的內部作面積分。我們可以發現兩個 Josephson phase 的差主要由外加磁場決定。再將這個結果帶回 (1.15) 式中：

$$I=2I_0\cos\left(\frac{e\Phi_{ext}}{2\hbar}\right)\sin\left(\varphi_1+\frac{e\Phi_{ext}}{2\hbar}\right) \tag{1.25}$$

$$=2I_0\cos\left(\frac{\pi\Phi_{ext}}{\Phi_0}\right)\sin\left(\varphi_1+\frac{\pi\Phi_{ext}}{\Phi_0}\right) \tag{1.26}$$

我們產生了一個可以藉由外加磁場改變電流的等效電感，這在調整量子位元與共振腔的耦合有很大的幫助。跟前一節的約瑟芬方程式比對，我們得到 SQUID 的臨界電流為：

$$I_0^{SQUID}=I_0\left|\cos\left(\frac{\pi\Phi_{ext}}{\Phi_0}\right)\right| \tag{1.27}$$

1.4 Transmon

以上我們已討論完空腔和量子位元的零件 Josephson junction 的性質，以及 Josephson junctions 在外加磁場下的能量變化，接下來我們將簡要探討 Josephson junction 與一個電容板並聯所形成的量子位元，稱為 Transmon qubit。

一個 Transmon qubit 包含了一個電容值極大的電容板，與一個和其並聯的 Josephson junction，這個裝置的總能為：

$$H=\frac{Q^2}{2C}+E_J[1-\cos\varphi] \tag{1.28}$$

其中 Q 為總電量，C 為電容值。在電流 I 小於臨界電流 I_0 的情況下，只有 Cooper pairs 的電子能穿透 Josephson junction 之間的絕緣體到達電容板上，因此我們將 Q 用 Cooper pairs 的數量 n 表示為 $Q=2en$ 。此時總能 H 寫成：

$$H=4E_cn^2+E_J[1-\cos(\varphi)] \tag{1.29}$$

其中 $E_c=\frac{e^2}{2C}$。接著，我們將 H 寫成算符 $\hat{H}=4E_c\hat{n}^2+E_J[1-\cos\hat{\varphi}]$，並將 $\cos\hat{\varphi}$ 項泰勒展開後計算，可將此非簡協振盪的共振能量近似為取其首兩項的簡諧振盪，並且得出第一共振能量 $E_1=\hbar\omega_q$，其中 $\omega_q=\sqrt{8E_JE_C}-E_C$。

1.5 穿透式共振器的品質因子

當電磁波射入一個空腔後，電磁場將會把能量儲存在此空腔內，在理想的情況中，我們希望能量在空腔內沒有任何的耗散，但不可避免地空腔壁一定會由於歐姆耗散或其他狀況而導致能量消耗。為了定量描述這個現象，於是我們定義一個空腔的品質因子 (quality factor, Q factor) 正比於空腔儲存的能量與空腔耗散功率的比值：

$$Q \propto \frac{\text{stored energy}}{\text{power loss}} \tag{1.30}$$

但為了與入射電磁波的週期有一個共同的基準，因此將 Q 定為：

$$Q \equiv \omega_0 \frac{\text{stored energy}}{\text{power loss}} \tag{1.31}$$

其中 $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ 是共振頻率。此時 $Q = \frac{2\pi\tau_d}{T}$, $\tau_d = \frac{\text{stored energy}}{\text{power loss}}$，表能量在空腔中耗散殆盡所需的時間。如此一來，$Q$ 的意義就代表在能量耗散完之前，電磁波總共會在空腔內振盪的次數，此數值越高，代表能量能存在空腔內越久，也就代表此儀器的品質越好。我們定義 $U = \text{stored energy}$, $-\frac{dU}{dt} = P_{\text{loss}} = \text{power loss}$，故：

$$Q = \omega_0 \frac{U}{P_{\text{loss}}} \tag{1.32}$$

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} = -\omega_0 \frac{U}{Q} \tag{1.33}$$

$$\Rightarrow U \propto \exp\left(-\frac{\omega_0}{Q}t\right) \tag{1.34}$$

另一方面，我們假設電場 $\vec{E}(\vec{r},t)$ 在無能量耗散的空腔任意一點內滿足以下形式：

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_0(\vec{r})e^{-i\omega_0 t} \tag{1.35}$$

再假設有能量耗散時電場滿足下形式：

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_0(\vec{r})\, e^{-i\omega_0 t + \delta t} \tag{1.36}$$

其中 δ 為待定的數。由 (1.34) 式 $U \propto |E|^2 = |E_0|^2 e^{2\delta t} \propto \exp\left(\frac{-\omega_0 t}{Q}\right)$ 可得到 $\delta = -\frac{\omega_0}{2Q}$，因此我們有：

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_0(\vec{r}) \exp\left(-i\omega_0 t - \frac{\omega_0}{2Q}t\right) \tag{1.37}$$

接著我們將 $\vec{E}(\vec{r},t)$ 轉換到相空間：

$$\begin{aligned}
\vec{E}(\vec{r},\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \vec{E}(\vec{r},t) e^{i\omega t} dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \vec{E}_0(\vec{r}) \int_0^{\infty} \exp\left(-i\omega_0 t - \frac{\omega_0}{2Q}t + i\omega t\right) dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\vec{E}_0(\vec{r})}{-i(\omega - \omega_0) + \omega_0/2Q}
\end{aligned} \tag{1.38}$$

我們可以得到：

$$U \propto \frac{1}{(\omega-\omega_0)^2+(\omega_0/2Q)^2} \tag{1.39}$$

同時發現最大值發生在 $\omega=\omega_0$ 時，且 $\frac{1}{2}$ 最大值發生在 $\omega=\omega_0 \pm \frac{\omega_0}{2Q}$。故我們可以得到半高寬 $\Delta\omega=\frac{\omega_0}{Q}$

而且當我們把能量單位轉換成 dB 時，相差一半幾乎就是相差 3-dB，因此我們可以從實驗的數據圖中量出空腔與量子位元耦合後的 loaded Q factor：

$$Q=\frac{\omega_0}{\Delta\omega}=\frac{f_0}{\Delta f} \tag{1.40}$$

從 Q factor 的定義中可以看到，當我們把數個物件串連在一起時，能量的總耗散量會是個別能量耗散的總和，所以我們有以下的公式：

$$Q_{\text{total}}=\omega_0\frac{\text{stored energy}}{\sum_n(\text{power loss})_{\text{n-th type}}} \tag{1.41}$$

$$\Rightarrow\frac{1}{Q_{\text{total}}}=\sum_n\frac{1}{Q_n} \tag{1.42}$$

所以當我們把輸入功率調大，以至於破壞空腔與量子位元的耦合關係時，可以量到單純空腔原始的 intrinsic Q factor Q_0，然後把功率調低，以至於量子位元與空腔恢復耦合關係後的 loaded Q factor Q_L，再運用以下的式子：

$$\frac{1}{Q_c}=\frac{1}{Q_L}-\frac{1}{Q_0} \tag{1.43}$$

即可得到量子位元本身的 quality factor Q_c。

1.6 Phase shift

從 (1.38) 式我們其實還可以看到輸入頻率達共振頻率時相位的變化：

$$\vec{E}(\vec{r},\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{\vec{E}_0(\vec{r})}{-i(\omega-\omega_0)+\omega_0/2Q}=\frac{\vec{E}_0(\vec{r})}{\sqrt{2\pi}}\frac{\cos\theta+i\sin\theta}{(\omega-\omega_0)^2+(\omega_0/2Q)^2} \tag{1.44}$$

其中 $\theta=\arctan\left(\frac{2Q(\omega-\omega_0)}{\omega_0}\right)$。所以當 $\omega=\omega_0$ 時，θ 恰好會通過 0，且此時 $\theta-\omega$ 圖的斜率為：

$$\left.\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\omega}\right|_{\omega=\omega_0}=\frac{2Q/\omega_0}{1+[2Q(\omega-\omega_0)/\omega_0]^2}=\frac{2Q}{\omega_0}=\frac{2}{\Delta\omega} \tag{1.45}$$

1.7 Dispersive Shift

當我們增強微波訊號的強度時，量子位元中產生的感應電流也會逐漸增加。當微波訊號不強時，我們會量到量子位元在基態與共振腔耦合時，共振腔的共振頻率。而訊號強度太高，會導致感應電流超過約瑟芬接面的臨界電流，而讓約瑟芬接面失去其超導態。這時，我們只能量到共振腔的共振頻率，而看不到量子位元的特性。除了幫助我們了解量子位元是否有正常運作之外，這個頻率變化也可以用來估計量子位元與共振腔個別共振頻率的差。頻偏大小 $\chi\approx\frac{g^2}{\Delta}$，其中 g 是量子位元與共振腔的耦合強度，而 Δ 則是量子位元與共振腔在沒有耦合時，共振頻率的差，

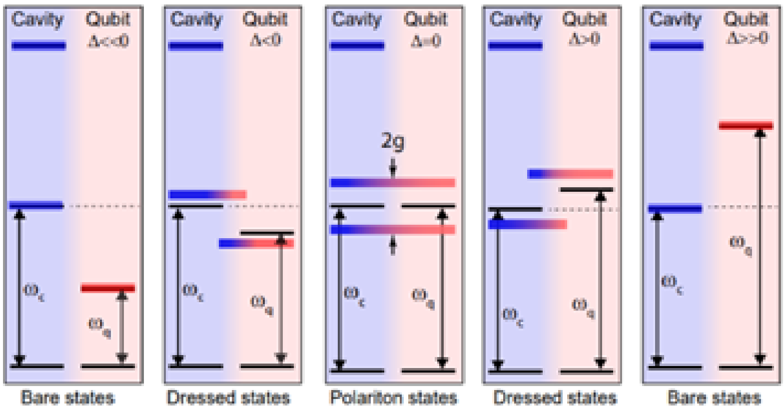

圖 1.4: 改變量子位元共振頻率時，整個系統由 bare state 進入 dressed state ，再到 polariton state ，之後回到 dressed state，最後到 bare state 的過程。圖中黑色橫線是量子位元與共振腔實際的共振頻率，彩色橫線則是實驗中觀測到的共振頻率。圖片來自 [2]。

1.8 Avoided crossing

最後，我們將簡單地介紹空腔和量子位元在耦合的情況下，他們的共振頻率變化，以及說明 avoided crossing 的現象。

在量子位元與共振腔處於低耦合時，我們測量到量子位元與共振腔的共振頻率，仍大致維持耦合前的共振頻率，稱為量子位元跟共振腔的 bare state 。如果提高量子位元的共振頻率，這時觀測到的量子位元與共振腔的共振頻率，與耦合前的共振頻率會有一點偏差，這個狀態稱作量子位元與共振腔的 dressed State ，此時可以藉由比較共振腔的 bare state 與 dressed state 的共振頻率，來判斷量子位元與共振腔共振頻率的相對關係。例如圖 (1.4) 最左邊兩張，共振腔的 bare state 比 dressed state 的頻率低，可以推測此時量子位元的共振頻率比共振腔略低，這在進行 1.7 節 dispersive shift 的測量中是很重要的估計。

接著，當量子位元與共振腔頻率相同時，我們會測得兩個不同的共振頻率，而這兩個共振頻率的差剛好等於 $2g$ 。在繼續提高量子位元的頻率時，會再次回到 dressed state ，最後回到 bare state。圖 (1.4) 中可以發現整個過程中，實驗觀察到的共振頻率 (藍色跟紅色橫線) 並不會重合，在圖 (1.5) 可以看出，當量子位元共振頻率 (紅色虛線) 與共振腔共振頻率 (藍色虛線) 交錯時，我們會觀測得兩條不交錯的共振頻率 (彩色實線)，這個現象被稱為 avoided crossing。

要仔細描述 avoided crossing 現象，我們先假設在此空腔內只有一個量子位元和一個光子，且量子位元在吸收一個光子後會從基態躍遷至激發態。設無光子且量子位元在激發態的狀態為 $|\psi_1\rangle$，而量子位元在基態且空腔內只有一個光子的狀態為 $|\psi_2\rangle$。設 $\hbar\omega_q$ 為量子位元在激發態的能量，ω_r 為空腔共振的頻率，故產生共振的光子能量為 $\hbar\omega_r$，因此：

$$\begin{cases} \langle\psi_1|\,\hat{H}\,|\psi_1\rangle = \hbar\omega_q \\ \langle\psi_2|\,\hat{H}\,|\psi_2\rangle = \hbar\omega_r \end{cases} \tag{1.46}$$

再假設有耦合時，量子位元可以吸收空腔的光子而受激，或是激發量子位元可以放出一個光子到空腔，導致它們之間存在著一個耦合常數 g，因此 $\langle\psi_1|\,\hat{H}\,|\psi_2\rangle = \langle\psi_2|\,\hat{H}\,|\psi_1\rangle^* = \hbar g \in \mathbb{R}$。

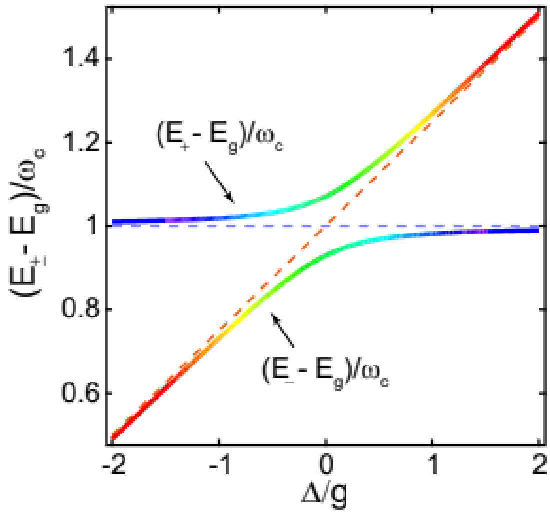

圖 1.5: Avoided crossing 示意圖。橫軸代表量子位元頻率的改變，縱軸代表能量。藍色虛線與紅色虛線分別代表共振腔與量子位元在 bare state 時，共振頻率的變化。彩色實線則是當兩者耦合時，從實驗中觀察到的共振頻率變化。我們可以藉由中間頻率差最窄的地方，來計算出量子位元與共振腔的耦合常數，這個頻率差剛好等於 $2g$。圖片來自 [2]。

我們可以寫出此系統的 Hamiltonian：

$$\hat{H} = \begin{bmatrix} \langle\psi_1|\,\hat{H}\,|\psi_1\rangle & \langle\psi_1|\,\hat{H}\,|\psi_2\rangle \\ \langle\psi_2|\,\hat{H}\,|\psi_1\rangle & \langle\psi_2|\,\hat{H}\,|\psi_2\rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hbar\omega_q & \hbar g \\ \hbar g & \hbar\omega_r \end{bmatrix} \tag{1.47}$$

解此矩陣的特徵值 λ：

$$(\hbar\omega_q - \lambda)(\hbar\omega_r - \lambda) - (\hbar g)^2 = 0 \tag{1.48}$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{\hbar}{2}\left[\omega_q + \omega_r \pm \sqrt{\omega(\omega_q - \omega_r)^2 + 4g^2}\right] \tag{1.49}$$

則此系統的特徵共振頻率為：

$$\omega_\pm = \omega_0 \pm \sqrt{\frac{\Delta^2}{4} + g^2} \tag{1.50}$$

其中 $\omega_0 = \frac{\omega_q+\omega_r}{2}$, $\Delta = \omega_q - \omega_r$。由以上的推演我們可以看到，在實驗中調整磁場所改變的 ω_q 值，會影響此系統兩個共振頻率的差值：

$$\Delta\omega = \omega_+ - \omega_- = 2\sqrt{\frac{\Delta^2}{4} + g^2} \tag{1.51}$$

且當 $\omega_q = \omega_r$ 時，$\Delta\omega$ 會有最小值 $2g$。

從實驗數據量測完 g 值後，我們可以從 (1.51) 式中推算在各個不同的電流之下，量子位元本身的共振頻率：

$$\omega_q = \omega_c + 2\sqrt{\left(\frac{\Delta\omega}{2}\right)^2 - g^2} \tag{1.52}$$

2 實驗儀器與方法

為了維持量子位元的超導態，我們必須將溫度降到 mK 等級，同時，也可以讓量子位元長時間維持在基態。我們是用的低溫藉由氦-3 跟氦-4 間的相變來讓系統降溫，在沒有其他熱擾動時，可以將系統降到趨近絕對零度，平常因為微波及磁場的作用，溫度大約維持在 20mK 附近。

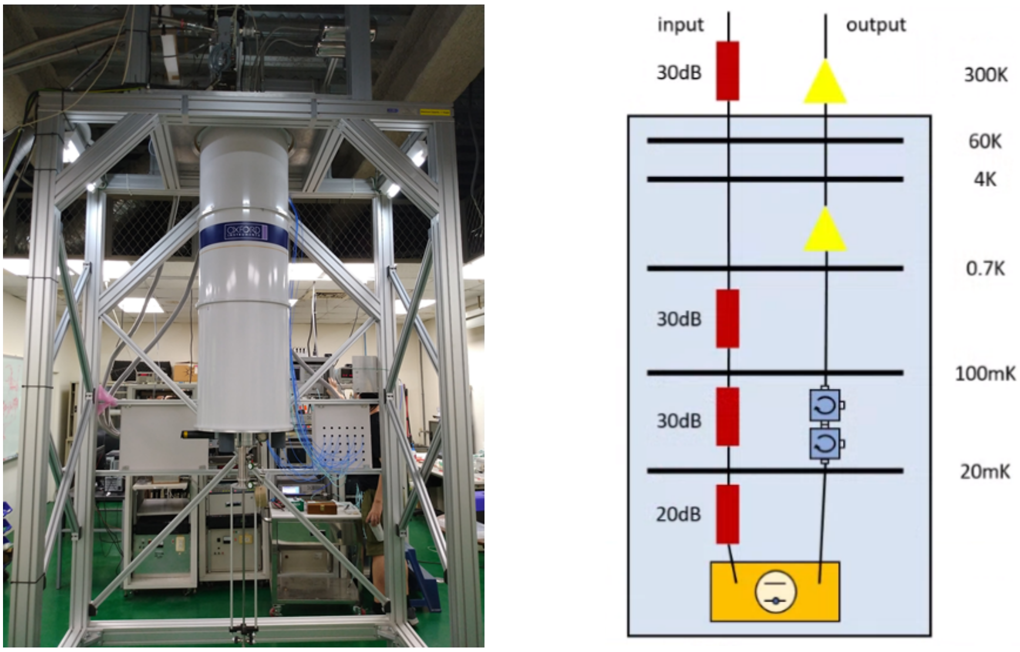

圖 2.1: 左圖時低溫系統的外觀，裡面是多層結構，由上而下慢慢將溫度降低。右圖是這次實驗線路設計圖，淺藍色的方塊代表代表冰箱，紅色的方塊是衰減器，黃色的三角形是放大器，中間深藍色正方形是環形器，最下方面的橘黃色方塊代表量子位元。這次實驗會從 input 打入不同頻率、強度的微波，來觀察從 output 出來的微波訊號。

我們使用 Agilent N5230A VNA 來產生微波，這台 VNA 除了可以控制微波訊號的頻率及振幅，也可以分析從共振腔中透射出來的微波訊號，藉由調整接收的 IF-bandwidth，我們可以控制收到的訊號在頻率軸上的解析度。至於外部磁場方面，我們使用 YOKOGAWA 7651 Programmable DC Source，來改變通過線圈的電流，同時改變 SQUID 感受到的磁通量。

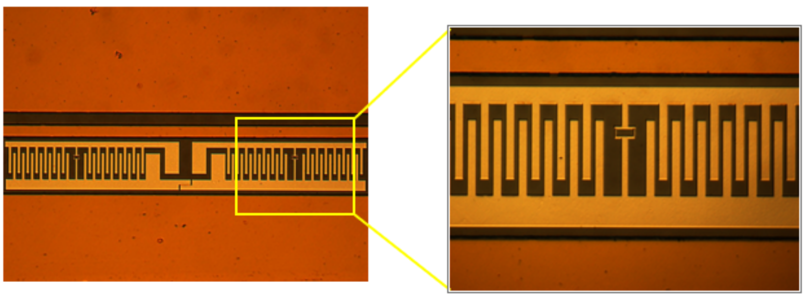

圖 2.2: 這次實驗所測量的量子位元。左圖是整個量子位元的照片，可以看出這由兩個 SQUID 組成，並透過中間的電容耦合。右圖則將其中一個 SQUID 放大，中間咖啡色小長方形的兩端，就是約瑟芬接面。

圖 (2.1) 展示了這次實驗使用的低溫系統與線路圖，VNA 產生的訊號強度介於 -30 ∼ 5dBm ，如果直接將這樣的訊號送進量子位元中，量子位元會被瘋狂加熱，很快就失去其超導態，甚至損壞，因此衰減器 (attenuator) 是必須的。右邊的環形器 (circulator) 功能類似電子的電路的二極體，可以讓訊號只能由下而上傳輸，來避免從上方反射回來的訊號影響測量，也避免溫度較高的雜訊加熱量子位元。圖 (2.2) 則是這次使用的量子位元，我們這次使用兩個互相耦合的 SQUID 進行測量，來了解外加磁場變化對兩個 SQUID 所造成的影響。

這次實驗我們首先測量量子位元與波導管耦合時的共振頻率 (實驗一)。接著，我們透過改變微波訊號的強度，觀察隨強度增強時，共振頻率的頻偏現象，並估計還能觀測到量子位元耦合現象的最大訊號強度。此外，透過 Bare States 與 Dressed States 頻率的不同，我們也試著計算 Q-factor(實驗二)。最後，我們固定微波訊號強度，改變量子位元旁線圈產生的磁場，來觀察當量子位元的共振頻率與波導管的共振頻率相近時，發生的 avoided crossing 現象，並藉此計算出量子位元與共振腔的耦合強度 (實驗三)。

3 結果與分析討論

3.1 實驗一: 量測空腔共振器之共振頻率

首先，找到共振頻率是量測量子位元的第一步，為此我們選定頻率區間 [4,8](GHz) 進行粗掃。值得注意的是，在頻率 5.409GHz 附近，強度具有極大值，而相位的左右兩側變化相當劇烈，故選定頻率區間 [5.209, 5.609] 進行細掃。

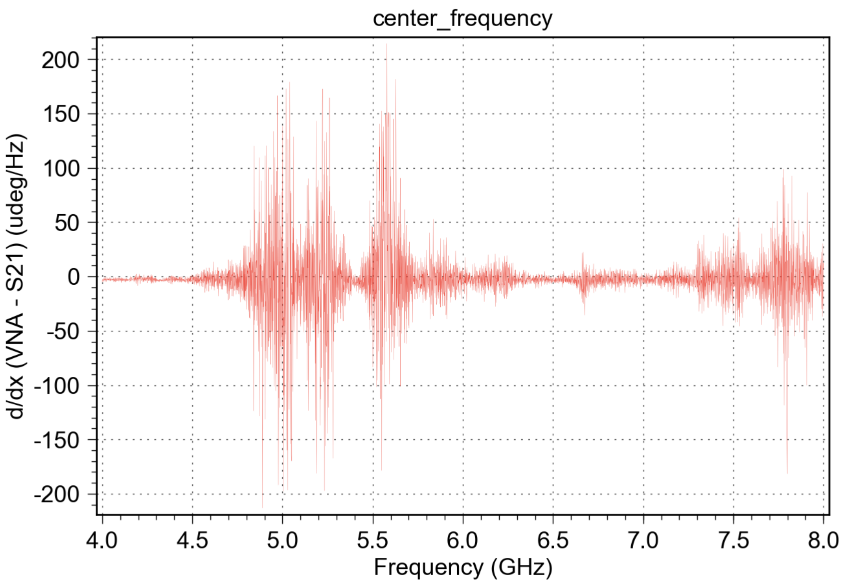

圖 3.1: 使用 VNA 量測穿透式共振器粗掃的相位與強度圖，其粗掃頻率區間 [4,8] GHz，在此圖中我們 VNA 輸出功率為-15dBm, 設定的點數為 5,001，需要注意的是，選取點數要能整除頻率區間差值並加一。

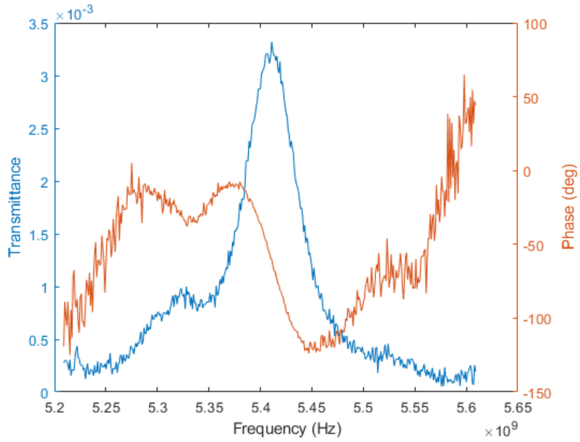

圖 3.2: 使用 VNA 量測穿透式共振器的透射率與相位疊圖，此圖中我們調整 VNA 輸出功率至-10dBm、調整 IF-bandwidth (100Hz) 以降低雜訊。

從圖 (3.2) 我們可以清楚看到在強度極大值的地方，相位有一個大幅度偏移，經過量測後我們認定此時共振頻率：

$$f_r = 5.411\,\text{GHz} \tag{3.1}$$

3.2 實驗二:dispersive shift 現象與相關發現

3.2.1 DC current source 對 Dipersive Shift 影響

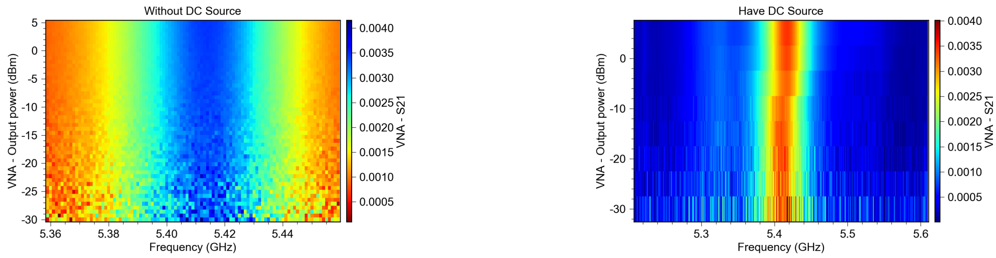

圖 3.3: 無外加磁場 (左圖) 以及有外加磁場 (右圖) 的 VNA 訊號圖

於圖 (3.3) 中，右圖可以發現當電流約等於 9.6mA 時有發生 VNA 訊號不連續的現象，然而在左圖卻無發生訊號不連續的現象，原因 DC current source 所產生的外加磁場使 Qubit 能量發生改變，才得以使我們觀察到 Dipersive Shift 現象。

3.2.2 Dipersive Shift 現象

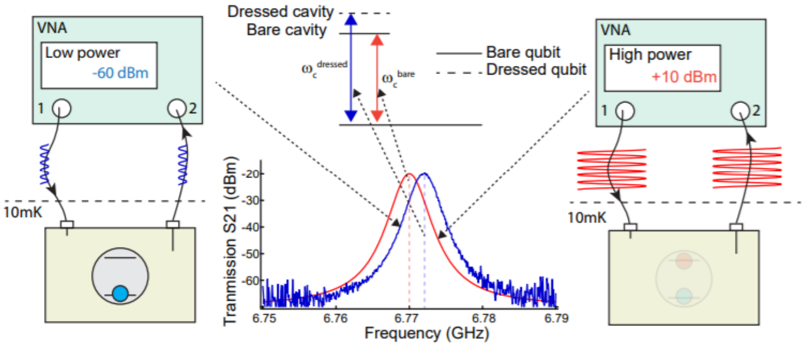

圖 3.4: “punch-out”測量，藍色（紅色）軌跡表示的空腔的低（高）功率傳輸 [註: 此圖示是反射式共振器的示意圖，故與我們量測結果相反。圖片來自 [2]。

當我們以高功率 VNA 訊號去量測量子系統時，VNA 輸入會過強以至於 Qubit 訊號被影響甚至被覆蓋，所以量測到的結果為共振腔 (平面波導管) 之共振訊號；但若以低功率 VNA 訊號去量測量子系統時，我們則可以量測到共振腔 (平面波導管) 及 Qubit 的共振訊號。也因此我們需要找到能量測到量子位元共振訊號才得以操控量子位元。

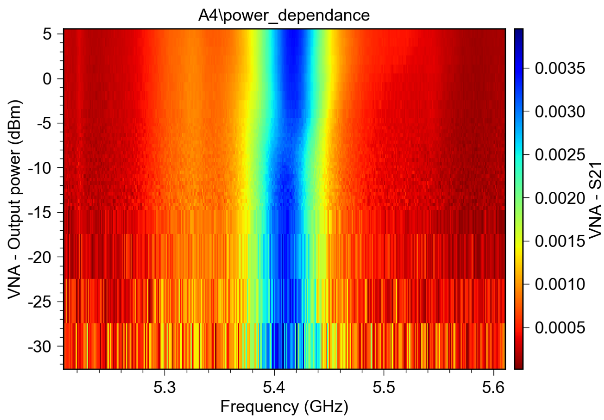

圖 3.5: 此圖為輸出不同的微波功率 [-30, 5](dBm)，以觀測 dispersive shift 的現象

確認共振頻率後 (之後可操作 Qubit 的最高頻率)，下一步我們調整 VNA 輸出功率，確保整個系統可以操控量子位元。從圖 (3.5) 我們可以看到 VNA 輸出功率約在大於-9.6 dBm 時向高頻位置偏移 10 MHz 左右，此為 dispersive shift，量測兩偏移之中心頻率可得：

$$\begin{cases} \omega_c^{\text{dressed}} = 5.407\,\text{GHz (-30 dBm} \leq \text{power} < \text{-9.6 dBm)} \\ \omega_c^{\text{bare}} = 5.417\,\text{GHz (5 dBm} \geq \text{power} > \text{-9.6 dBm)} \end{cases} \tag{3.2}$$

其中 $\omega_c^{\text{dressed}}$ 代表空腔共振器與量子位元耦合之平均頻率，ω_c^{bare} 代表空腔共振器之平均頻率。

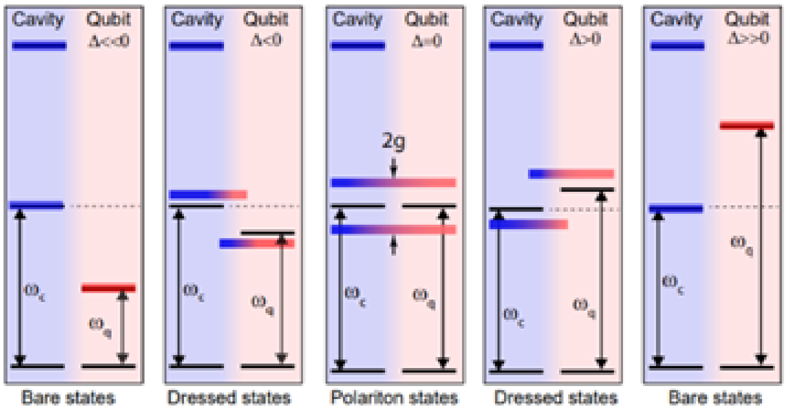

圖 3.6: dressed state 和 bare state: 此圖說明了量子位元與空腔共振器在不同 detuning 時產生的不同狀態。圖片來自 [2]。

由圖 (3.6) 我們可以觀察到當系統處在 dressed state 時量子位元與共振器發生耦合，使得共振器頻率改變，又由圖 (3.5) 中觀測可知 $\omega_c^{\text{bare}} > \omega_c^{\text{dressed}}$ 故可以推測 $\omega_q > \omega_c$，其中 ω_q 代表量子位元頻率，ω_c 代表共振器頻率。

3.2.3 Q factor

這也告訴我們，當系統處在 bare state 時量子位元和共振器是互不影響的，也就是說唯有當 VNA 輸出結果小於-9.6dBm 時我們才得以操控量子位元。

接下來我們由 Q-Factor 來討論 VNA 輸出功率大於、小於及等於-9.6dBm 之耦合程度，首先我們先定義 Q-Factor：

$$\frac{1}{Q_L} = \frac{1}{Q_0} + \frac{1}{Q_C} \tag{3.3}$$

$$Q_L = \frac{f_r}{\Delta f_L} \tag{3.4}$$

其中，Δf 的範圍由 $|S_{21,L}| = \sqrt{\frac{1+|S_{21,max}|}{2}}$ 求得，因 $|S_{21,max}|^2 \ll 1$ & $1 + |S_{21,max}| \approx 1$，故 Δf_L 的選取範圍約在-3dB。接著我們定義 coupling factor [3]

$$\kappa = \frac{S_{21,max}}{S_{11,min}} = \frac{|S_{21,max}|}{1 - |S_{21max}|} \tag{3.5}$$

而 κ 只和 $S_{21,max}$ 有關, 於是我們可定義 Q-Factor 為：

$$Q_0 = Q_L(1+\kappa) \tag{3.6}$$

$$Q_C = \frac{Q_0}{\kappa} \tag{3.7}$$

將 κ 以 $|S_{21,max}|$ 替換，找 Q_0、Q_c 對 Q_L 的關係式:

$$Q_0 = \frac{Q_L}{1 - |S_{21,max}|} \tag{3.8}$$

$$Q_C = \frac{Q_L}{|S_{21,max}|} \tag{3.9}$$

藉由公式我們可以發現當 $|S_{21,max}|$ 越大時，Q_c 的耦合強度越小。

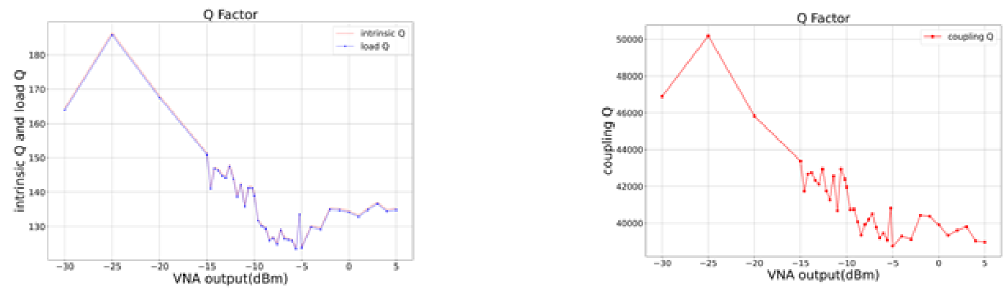

圖 3.7: 為利用圖 (3.5) VNA output 所有輸出值, 由式 (3.4) 找出 Q_L 再由式 (3.8) (3.9) 計算出 Q_c 、Q_0 的結果

由圖 (3.7) 可以看出在輸出功率 [-10, -7] 的 Q 值有急遽的變化，並觀察其結果發現 VNA 輸出功率在-9.6,-9.2 及-5.2dBm 有顯著的變化，這也對應在圖 (3.5) 中發生 dispersive shift 的位置，又可發現在輸出功率小於-10dBm 耦合值很高，而大於-5dBm 耦合值很低，這也完美的解釋，系統處在 dressed state 呈現高耦合，處在 bare state 呈現低耦合。

3.3 實驗三: 外加磁場改變 Qubit 共振頻率與相關發現

3.3.1 avoid crossing 現象

最後，我們固定 VNA 輸出功率，調整 DC Source，改變量子位元的能量。

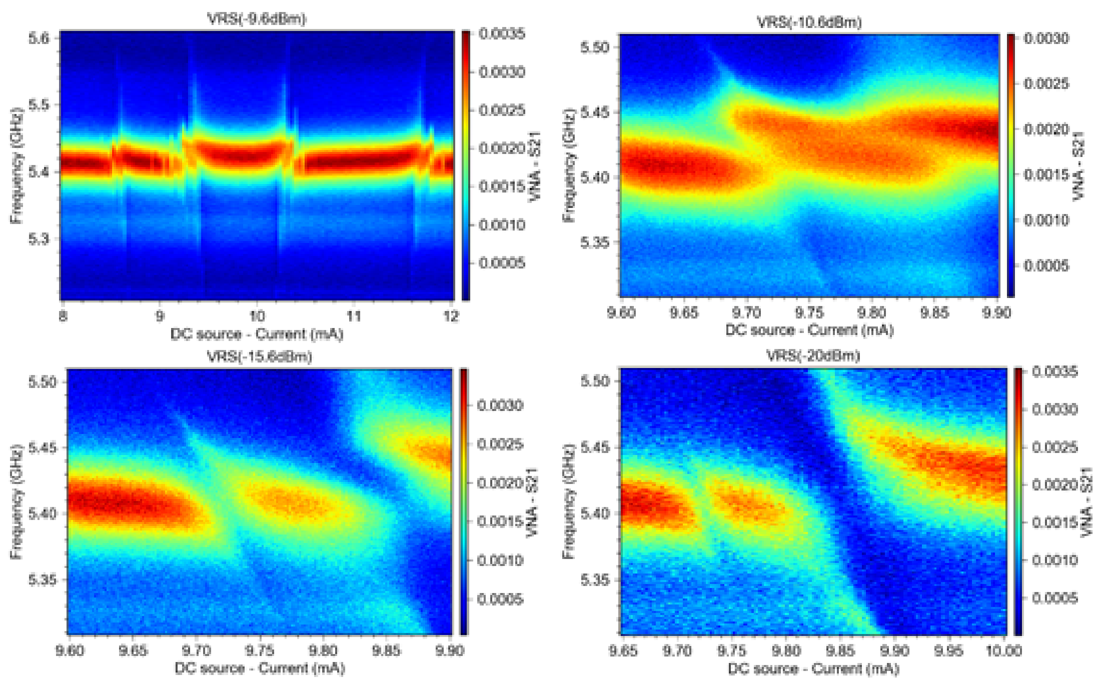

圖 3.8: 此四張圖是在比較不同 VNA 輸出功率下，改變 DC Source 以及觀察區間 [9,10] 之間的變化

圖 (3.8) 中可看出當 DC Source 處在 8.56, 9.25, 10.35 及 11.76 mA 時有數條分裂，由於輸出功率在 -9.6dBm 時分裂狀態不是很明顯，於是我們固定 9.25mA 附近，降低 VNA 輸出功率，以增強量子位元與共振器的耦合程度，有趣的是，我們可以從表

(3.1) 發現到分裂會隨著 VNA 輸出功率降低，所需的 DC Source 逐漸增強，且周圍比較不明顯的分裂逐漸縮小，而原本最大的分裂逐漸增大。

Table 3.1: 不同輸入功率下，avoided crossing 的最小分裂頻寬與此時外加的直流電流大小

輸入功率 (dBm)	Center Split[1](MHz)	分裂中心之電流值 (mA)
-9.6	36.42	9.25
-10.6	42.57	9.7
-15.6	61.4	9.84
-20	151.4	9.85

3.3.2 磁滯效應

如果將未帶磁性的鐵磁性物質施加外加磁場時，我們可以發現鐵磁性物質受到磁場影響而被磁化，然而當外加磁場去除後，鐵磁性物質的磁性不會消除，仍保有磁性(殘磁)，這種現象就稱之為磁滯現象。

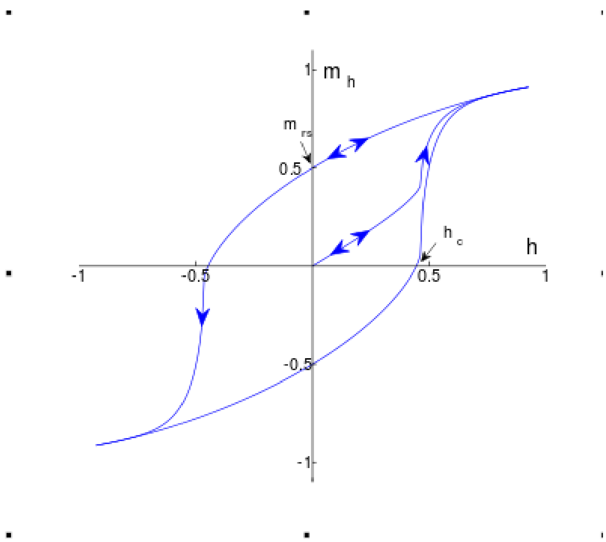

圖 3.9: 磁滯效應示意圖

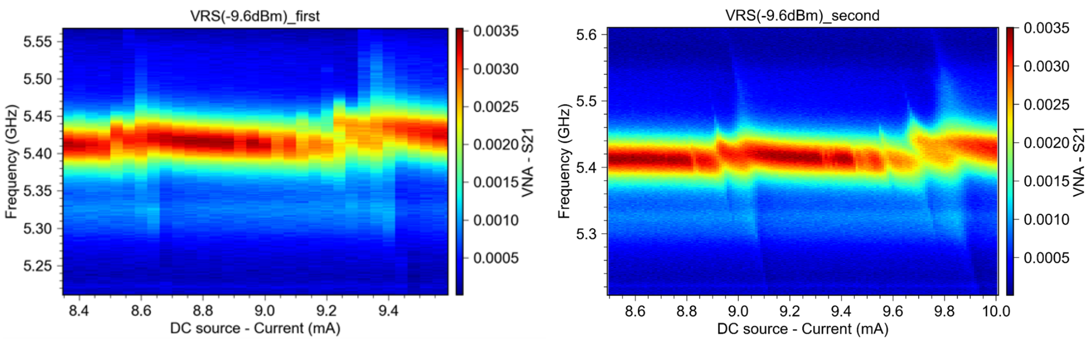

圖 3.10: 左圖為第一次使用 DC Source 測量 avoided crossing，右圖為第二次測量並且細掃的結果，以下的討論以兩圖中右邊最大的分裂作為比較，且兩圖中輸出功率皆為-9.6dBm。

[1]Center split 代表 x 軸 (mA) 區間 [9,10] 中最大分裂中心的 2g 值

觀察圖 (3.8) 左圖，經由量測後此分裂的中心位置約在 9.252mA ，而右圖中，分裂的中心位置約在 9.711mA ，不難發現，經過兩次量測後，分裂會向右偏移又或者說需要增強外加磁場才能觀測到分裂現象，此原因正是所謂的磁滯現象，通過一次的外加磁場，使得餘磁殘留在裝置中，而若要消磁則有兩種方法: (1) 加熱 (2) 外加相反磁場，但我們並沒花時間解決磁滯現象造成的影響。

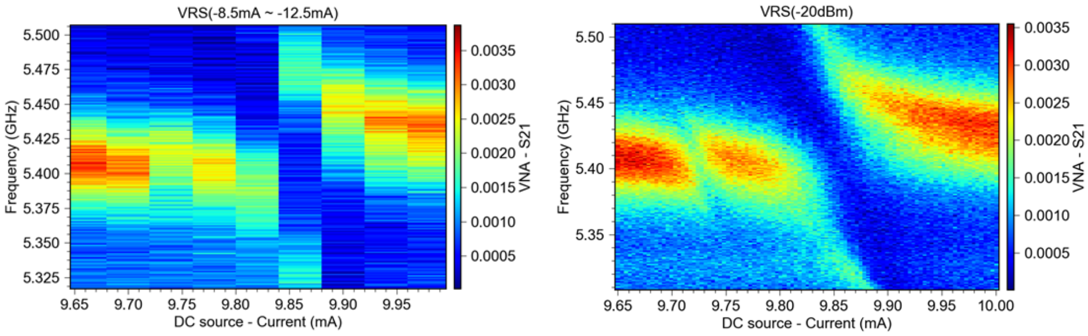

圖 3.11: 左圖為第 9 次使用 DC Source 在 VNA 輸出功率為-20dBm，從 8.5mA 到 12.5mA 粗掃結果，右圖為第 8 次使用 DC Source 在 VNA 輸出功率為-20dBm，從 9.65mA 到 10mA 細掃結果。

接著，我們比較多次使用 DC Source 量測分裂，並且與圖 (3.10) 做比較，在圖 (3.11) 左圖中分裂位置約落在 9.859mA ，於右圖中分裂位置約落在 9.850mA ，似乎多次於同樣範圍內改變外加磁場並不會再造成明顯地分裂偏移，而這種結果就是所謂的磁飽和。

3.3.3 Two Photon Absorption

但在此實驗中，我們未量測 VNA 輸出功率大於 -9.6dBm 時 DC Source 與頻率之間的關係，但我們可以從圖及表反推，若 VNA 輸出功率大於 -9.6dBm ，我們可以推得最大的分裂變得不那麼明顯，比較不明顯的分裂增多且變大，這些細小分裂是 Two-photon absorption(TPA) 造成的，此種現象是指在極低的機率下，雖然外加微波內每一光子的能量不足以從 ground state 激發到 excited state，但我們可以假設 ground state 與 excited state 中間存在著 virtual state ，以至於我們會發現若兩光子所具有的能量剛好等於激發所需的能量時也會發生能階躍遷。

由於 TPA 現象發生的機率與光強度平方成正比 (光子打入數目)，因此當微波訊號越強，空腔內光子數越多，光強度越強，效應越明顯，反之，微波訊號越弱，空腔內光子數越少，光強度越小，效應越不明顯。

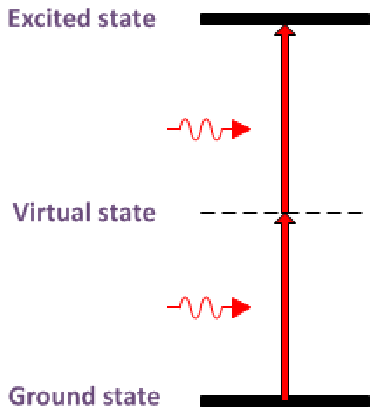

圖 3.12: Two Photon Absorption 示意圖。

3.3.4 不同周期兩 Qubit 的 avoid crossing 現象

最後我們調整 DC Source 使 $\omega_q \approx \omega_c$ 並且量測 avoided crossing 兩本徵態頻率差 (即 g 值)。透過比較圖 (3.13) 我們發現每張圖共有四條分裂，而我們的裝置為一空腔共振器和兩量子位元所構成，故這四條分裂為兩量子位元和空腔共振器所造成的 vacuum Rabi splitting(VRS), 再從區間 [8.5, 12.5] 可知四條分裂在 x 軸 10.5mA 地方分裂呈現對稱，我們推測兩個不同方向的分裂 (共有兩對分裂)，是由其中一顆 qubit 造成的，再由區間 [25.5, 35.5] 以及 [45.5, 55.5] 可發覺這兩對分裂隨電流值越大而逐漸遠離，故我們推測兩對分裂並不互相干涉、影響。

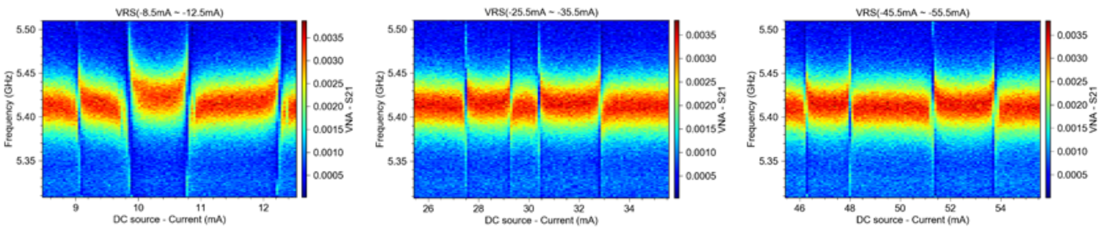

圖 3.13: 為了量測量子位元和共振器間的 g 值，利用 DC Source 操控區間 [8.5, 12.5], [25.5, 35.5] 及 [45.5, 55.5](mA)。

Table 3.2: 藉由圖 (3.13) 算出 g 值，其中 g 代表左上到右下的非對角值，g^* 代表右上到左下的非對角值，黑色欄位為假設為第一顆 qubit，反之白色欄位為假設為第二顆 qubit，δg 為同一顆 qubit 造成 2 分裂 x 軸差值。

Current Range (mA)		g (MHz)	g^* (MHz)	δg (mA)
[8.5, 12.5]	g_1	20.38	29.95	1.74
	g_2	30.77	22.71	2.4
[25.5, 35.5]	g_1	15.91	21.27	1.8
	g_2	17.96	22.11	2.44
[45.5, 55.5]	g_1	19.79	20.34	1.77
	g_2	29.61	27.05	2.56

我們發現 DC Source 在低電流 (8 $\sim$ 12mA) 的情況下 g 和 g^* 並不相似 (誤差很大)，而在高電流 (45 $\sim$ 55mA) 的情況下 g 和 g^* 約略相同，故我們可以利用區間 [-45.5,

-55.5] g 值來計算 ($g_1 = 19.79$ MHz，$g_2 = 29.61$MHz) 量子位元頻率：

$$\omega_q = \omega_c + 2\sqrt{(\frac{\Delta\omega}{2})^2 - {g_1}^2} \tag{3.10}$$

我們不難發現 $\frac{\Delta\omega}{2} < g_1$，故所計算的結果包含虛數，一般來說耦合強度要精確到 1MHz，這部分我們來不及做，也就是說以目前測量數據來看，我們無法計算量子位元頻率。

4 總結

在本次的實驗中，我們透過調整微波輸入的頻率，尋找共振腔在初始環境下的共振頻率 $f = 5.411$GHz，並且發現此時相位對頻率作圖的斜率有極值，此現象正好符合我們在原理 1.6 的探討。

並且當我們以此頻率為中心基準時，我們發現功率的改變會使中心頻率發生偏移，從最高的 5.417GHz 到最低的 5.407GHz，甚至在高於 -9.6dBm 的強度下，會因為感應電流超過約瑟芬接面的臨界電流而破壞其超導態，使我們的空腔無法再與量子位元進行藕合，此現象也驗證了原理 1.7 的解釋。

再來我們以原理 1.5 頻率半高寬的結果，對 Q factor 進行計算和分析時，並試著以 Q factor 來了解空腔與量子位元藕合的程度，發現在功率小於-10dBm 的情況下，Q factor 明顯高於功率大於-9.6dBm 的情況。這個現象說明了過高的功率會使量子位元的高 Q factor 無法影響共振腔的低 Q factor，也就驗證了此情況兩元件無法藕合的現象。

最後我們以原理 1.2 到 1.4 為基礎，探討電流對量子位元的影響，在過程中遇到了磁滯現象以及 two-photons absorption 的現象，前者無太大的影響，但為了避免後者的干擾，我們以降低功率的方式進行。在這之中觀察到兩個量子位元各自的共振頻率會隨著外加電流而有周期變化，且在每一周期之中都各自會因為頻率恰與共振腔的頻率相同，而發生 avoid crossing 的現象。此時我們運用原理 1.8 推算出每個周期下，兩個量子位元各自與共振腔的 g 值。

在眾多的實驗中，我們親自動手驗證了每一項的原理，且幾乎都有成功的符合我們原先的預期，不過在最後一個實驗中，由於器材的精確度以及時間上的限制，我們尚不能精準測出量子位元的共振頻率，這也是我們這組目前想更加精進的方向。

5 組員貢獻

梁仁謙: 結報: 1(原理)、總結
何隆貴: 結報 3.1、3.2.[2、3]、3.3.[1 ~ 4] (數據分析)
張承恕: 結報: 2(實驗儀器)，結報整理 (overleaf)、修正
張祐銘: 結報: 3.2.1、ppt
孫可杰: 傳共編 google docs 連結

6 參考資料

6.1 參考文獻

[1] M. Göppl, A. Fragner, M. Baur, R. Bianchetti, *et al.* (2008), Coplanar waveguide resonators for circuit quantum electrodynamics.

[2] Mahdi Naghiloo (2019), Introduction to Experimental Quantum Measurement with Superconducting Qubits.
[3] R. Markus, Development of lumped element kinetic inductance detectors for mm-wave astronomy at IRAM 30 m telescope, KIT Scientific Publishing, vol. 12, 2014.

6.2 附圖來源

Two Photon Absorption: http://www.simphotek.net/bckg/bckg.tpa.html
磁滯效應: https://zh.wikipedia.org/wiki/

附錄一：不同微波訊號下，量子位元與共振腔的 Q-factor

$P_{\rm in}$(dBm)	-30	-25	-20	-15	-14.6	-14.2	-13.8	-13.4
f_r(GHz)	5.409	5.407	5.407	5.411	5.411	5.413	5.412	5.415
Δf_L(MHz)	33	29.1	32.27	35.85	38.39	36.88	36.99	37.41
$\lvert S_{21\,\max}\rvert$ (dB)	-49.13	-48.63	-48.74	-49.17	-49.43	-49.27	-49.31	-49.32
κ	3.51E-03	3.72E-03	3.67E-03	3.49E-03	3.39E-03	3.45E-03	3.44E-03	3.43E-03
Q_L	163.909	185.808	167.555	150.934	140.948	146.773	146.31	144.747
Q_0	164.484	186.498	168.17	151.461	141.426	147.28	146.812	145.244
Q_C	46892.46	50183.78	45830.8	43379.88	41740.67	42672.4	42733.99	42326.34
$P_{\rm in}$(dBm)	-13	-12.6	-12.2	-11.8	-11.4	-11	-10.6	-10.2
f_r(GHz)	5.414	5.412	5.408	5.41	5.412	5.412	5.409	5.411
Δf_L(MHz)	37.55	36.68	37.61	39.05	38.06	39.86	38.3	38.33
$\lvert S_{21\,\max}\rvert$	-49.31	-49.28	-49.26	-49.48	-49.52	-49.53	-49.66	-49.55
κ	3.44E-03	3.45E-03	3.46E-03	3.37E-03	3.35E-03	3.35E-03	3.30E-03	3.34E-03
Q_L	144.181	147.546	143.792	138.54	142.197	135.775	141.227	141.169
Q_0	144.676	148.055	144.288	139.007	142.673	136.23	141.693	141.641
Q_C	42112.24	42946.57	41757.39	41264.47	42548.97	40674.34	42945.55	42387.59
$P_{\rm in}$(dbm)	-10	-9.6	-9.2	-8.8	-8.4	-8	-7.6	-7.2
f_r(GHz)	5.408	5.409	5.407	5.413	5.414	5.415	5.413	5.415
Δf_L(MHz)	38.92	41.08	41.57	41.84	43.02	42.79	43.38	41.99
$\lvert S_{21\,\max}\rvert$	-49.6	-49.81	-49.92	-49.82	-49.90	-49.98	-50.16	-49.94
κ	3.32E-03	3.24E-03	3.20E-03	3.24E-03	3.21E-03	3.18E-03	3.11E-03	3.19E-03
Q_L	138.952	131.67	130.07	129.374	125.848	126.548	124.781	128.959
Q_0	139.413	132.097	130.486	129.793	126.252	126.951	125.17	129.371
Q_C	41962.74	40736.77	40754.57	40072.49	39341.22	39926.03	40192.82	40499.77
$P_{\rm in}$(dbm)	-6.8	-6.4	-6	-5.6	-5.2	-5	-4	-3
f_r(GHz)	5.414	5.415	5.418	5.417	5.416	5.417	5.417	5.419
Δf_L(MHz)	42.85	42.94	43.08	43.89	40.59	43.8	41.74	41.98
$\lvert S_{21\,\max}\rvert$	-49.96	-49.85	-49.93	-50.01	-49.71	-49.92	-49.62	-49.63
κ	3.19E-03	3.23E-03	3.20E-03	3.17E-03	3.28E-03	3.20E-03	3.32E-03	3.31E-03
Q_L	126.348	126.106	125.766	123.422	133.432	123.676	129.78	129.085
Q_0	126.75	126.513	126.168	123.813	133.87	124.072	130.21	129.513
Q_C	39771.08	39195.52	39451.48	39074.48	40809.34	38751.16	39283.16	39118.01
$P_{\rm in}$(dbm)	-2	-1	0	1	2	3	4	5
f_r(GHz)	5.417	5.418	5.415	5.416	5.417	5.417	5.418	5.416
Δf_L(MHz)	40.14	40.21	40.37	40.78	40.17	39.66	40.31	40.17
$\lvert S_{21\,\max}\rvert$	-49.53	-49.53	-49.47	-49.43	-49.36	-49.29	-49.26	-49.22
κ	3.35E-03	3.35E-03	3.37E-03	3.39E-03	3.42E-03	3.44E-03	3.46E-03	3.47E-03
Q_L	134.953	134.743	134.134	132.81	134.852	136.586	134.408	134.827
Q_0	135.405	135.194	134.587	133.26	135.312	137.056	134.873	135.295
Q_C	40427.93	40365	39906.14	39330.68	39614.76	39802.11	39032.49	38974.17